

三维弹性边界元法中 $1/r$ 奇异性与面力不连续的处理

南京航空学院 温卫东 高德平

一、面力不连续问题的处理

对于任意一个边界为 Γ 的弹性体空间域 Ω 可推导出其边界积分方程的矩阵形式为:

$$[c]^i \{u\}^i + \int_{\Gamma} [p^*] \{u\} d\Gamma = \int_{\Gamma} [u^*] \{p\} d\Gamma + \int_{\Omega} [u^*] \{b\} d\Omega \quad (1)$$

其中 $\{u\}$ 与 $\{p\}$ 分别为边界上的位移及面力列阵, $\{b\}$ 为 Ω 内的单位体力列阵, $i \in \Omega \cup \Gamma$, $[c]$ 是与 i 点邻近的几何形状相关的系数矩阵, $[p^*]$ 和 $[u^*]$ 分别为面力与位移基本解方阵, 其子元分别为 $u_{lk}^* = A_{lk}/r$ 及 $p_{lk}^* = -B_{lk}/r^2$, 其中

$$A_{lk} = \frac{(3-4\nu)\delta_{lk} + r/r_k}{16\pi G(1-\nu)}, \quad B_{lk} = \frac{n_m r_m \{1 - 2\nu\} \delta_{lk} + 3r/r_k - (1-2\nu)(r/r_k - r_k/n_l)}{8\pi G(1-\nu)}$$

G 和 ν 为材料剪切模量和泊松比, r 为所考虑的点 i 与积分点之间的距离, δ_{lk} 为 Dirac delta 函数, n_l 和 r_k 分别为 $\partial/\partial x_l$ 和 $\partial/\partial x_k$, n 为积分点处的边界外法向。

若将 Γ 分成 NE 个单元, 第 e 个单元上的形函数矩阵为 $[\Phi]^e$, 相应的 e 单元上节点位移与面力列阵分别为 $\{u\}^e$ 和 $\{p\}^e$ 。在不考虑体力时,

(1) 式可写成:

$$\begin{aligned} [c]^i \{u\}^i + \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} [p^*] [\Phi]^e \{u\}^e d\Gamma \\ = \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} [u^*] [\Phi]^e \{p\}^e d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

令 $[H]^e = \int_{\Gamma_e} [p^*] [\Phi]^e d\Gamma + \int_{\Gamma_e} [c] \delta d\Gamma$, $[G]^e = \int_{\Gamma_e} [u^*] [\Phi]^e d\Gamma$, 其中 δ 为 Dirac 函数。当 i 点不是当前积分单元 e 上某一节点时, $[H]^e$ 中第二项为零。利用图 1 中总体坐标与局部坐标关系, 其微元

面积 $d\Gamma = \left| \frac{\partial r}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial r}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 = |G_1| d\eta_1 d\eta_2$ 。

利用上述关系, 可将 $[H]^e$ 和 $[G]^e$ 变换到边长为 2 的正方形母单元上, 用标准高斯求积公式求解。

利用 $[H]^e$ 和 $[G]^e$ 关系且合并 $\{u\}^i$ 项, (2) 式写为:

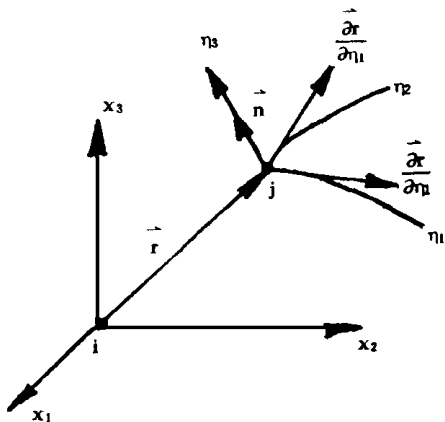


图 1 总体坐标与局部坐标关系

$$\sum_{e=1}^{NE} [H]^e \{u\}^e = \sum_{e=1}^{NE} [G]^e \{p\}^e \quad (3)$$

如图 2 所示, 设节点 j 与 $e_1, e_2 \dots e_n$ 个单元相关, 且在 j 点邻近面力不连续 (此时, 位移总是连续的)。当物体上存在面力不连续的点时, 不能直接求解 (3) 式, 应采用适当方法处理。

对于最常见的面力不连续情况, 即在 j 点三个独立方向上, 分别不多于一个面力或位移未知量。对此, 在采用八节点等参元时, 可按下述方法处理, 即由 (3) 式得:

$$\sum_{e=1}^{NE} [H]^e \{u\}^e = \sum_{\substack{e=1 \\ e \neq e_a}}^{NE} [G]^e \{p\}^e + \sum_{e=e_1}^{e_n} \{ [g_{i1}] [g_{i2}] \dots [g_{ij-1}] [0] [g_{ij+1}] \dots [g_{ie}] \}^T (\{p^1\} \dots \{p^8\})^T \}^e + \sum_{e=1}^{NE} [g_{ij}]^e \{p^j\}^e \quad (4)$$

其中 $e_a = e_1, e_2 \dots e_n$ 。按上述处理后, 方程右边的前两项可合并, 而第三项可根据上述最常见的面力不连续具体情况, 分别对与 j 点有关的 e_n 个单元进行运算。这一处理方法, 不难推广到 j 点为 $j_1, j_2 \dots j_n$ 的情况。

对于 j 点三个独立方向上分别多于 1 个面力未知量的情况, 可引入位移协调方程与 (4) 式联立求解。

二、对 $1/r$ 奇异性的处理与讨论

文献 [1] 在二维弹塑性体积积分中消除 $1/r$ 奇异性做了很有益的工作, 本文将将其引入三维弹性面积分的 $1/r$ 奇异性处理中, 当经过上节所述的内容处理后, 对求 $[G]^e$ 中的 $1/r$ 奇异性, 便可运用文献 [1] 的方法进行处理。

当所考虑的点 i 为单元上的角节点时, 可将正方形母单元分成两个三角形单元, 并建立极坐标 (ρ, θ) 与局部坐标 (η_1, η_2) 的变换关系^[1], 则 $[G]^e$ 可写成:

$$[G]^e = \iint_1 f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta + \iint_2 f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (5)$$

其中 $f(\rho, \theta) = [u^*] [\Phi]^e |G_i|$ 。当点 i 为单元边上的中节点时, 将母单元分成三个三角形单元, 则有:

$$[G]^e = \iint_1 f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta + \iint_2 f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta + \iint_3 f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (6)$$

只要点 i 在当前积分单元上, 无需求与积分点重合, 就有 $r = \rho$, 因此有下式恒成立:

$$f(\rho, \theta) \rho = f_1(\rho, \theta) \rho / r = f_1(\rho, \theta) \quad (7)$$

其中 $f_1(\rho, \theta) = [A] [\Phi]^e |G_i|$ ($[A]$ 子元见上一节 A_{ik} 定义)。可见, 经过极坐标变换后, 消除了原积分中的 $1/r$ 因子的奇异性。

当点 i 与积分点重合且边界光滑时, 由图 1 可知, $\bar{n} = \bar{\partial}/\partial\eta_1 \times \bar{\partial}/\partial\eta_2$, 所以有

$$|G_i| = \frac{\bar{\partial}}{\partial\eta_1} \frac{\bar{\partial}}{\partial\eta_2} = \left| \frac{\partial x_1}{\partial\eta_1}, \frac{\partial x_2}{\partial\eta_1}, \frac{\partial x_3}{\partial\eta_1} \right| = |\bar{n}| \neq 0$$

又因为 $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (\rho, \theta)$ 变换是连续的, 所以 $|G_i|$ 在 (ρ, θ) 或 (η_1, η_2) 坐标系中上述

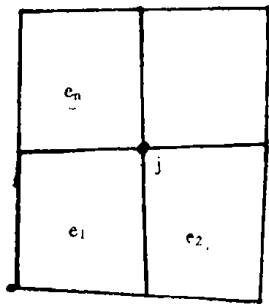


图 2 面力不连续点位置示意

结论恒成立。

三、算例的数值试验

如图3所示,厚壁圆筒,内壁受均布压力2000Pa作用,弹性模量 E 为 $2.1 \times 10^8 \text{ Pa}$, ν 为0.3。由于属轴对称问题,取其四分之一部分研究。当半径 r 为15cm时,精确解为:环向应力 σ_θ 为1852Pa,径向位移 δ_r 为 $1.415 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 。参数上标为节点或内点号。表2中 O 点位于图3结构的重心。

表1为 A 和 B 条件下的部分数值结果,其中 A 条件为考虑面力不连续,但不对 $1/r$ 奇异性作处理; B 条件为不考虑面力不连续,但对 $1/r$ 奇异性作处理。表中 M_1 为 i 点不在当前积分单元上时对母单元的高斯积分点数, M_2 为作 $1/r$ 奇异性处理时,对每块三角形的高斯积分点数。从表1的数值结果看出,尽管 M_1 和 M_2 较多,但数值结果仍很差。

表2为考虑了面力不连续,并对 $1/r$ 奇异性作处理后的数值结果。从中看出, M_1 和 M_2 较少时,数值结果仍较好。随 M_1 和 M_2 增加,数值解精度进一步提高。

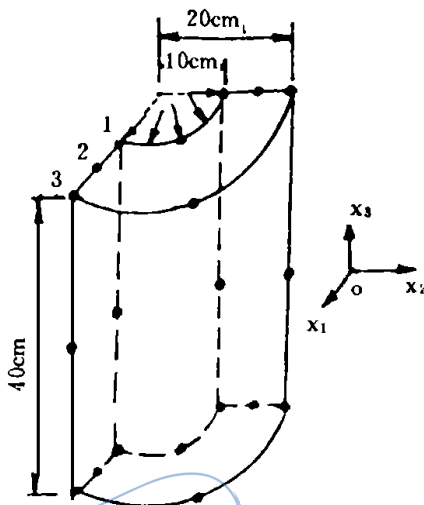


图3 厚壁圆筒边界元计算模型

表1 圆筒在 A 和 B 条件下的部分应力与位移

M_1, M_2	A 条 件		B 条 件	
	$\delta_{x_1}^2$ (10^{-3} cm)	$\alpha_{x_2}^2$ (Pa)	$\delta_{x_1}^2$ (10^{-3} cm)	$\alpha_{x_2}^2$ (Pa)
25, 25	0.1540	- 3075	0.2087	- 1138
36, 36	0.1225	- 1300	0.2093	- 1142

表2 圆筒的部分应力与位移

M_1, M_2	$\delta_{x_1}^2$ (10^{-3} cm)	$\alpha_{x_2}^2$ (Pa)	$\delta_{x_1}^2$ (10^{-3} cm)	$\alpha_{x_2}^2$ (Pa)
9, 9	0.1447	0.2449	- 1720	733
25, 25	0.1389	0.1577	- 1842	1149
36, 36	0.1395	0.1343	- 1845	1870

四、结 论

1. 本文中的方法能处理常见的面力不连续问题,方法简捷,数值结果也较理想。
2. 文献[1]中的方法推广用于处理三维弹性边界元中面积分的 $1/r$ 奇异是可行的。当奇异点在当前积分单元上时,有 $r = \rho$,从而消除 $1/r$ 的奇异性。

参 考 文 献

- [1] 李文龙、张相麟,“弹塑性边界元法中带 $1/r$ 奇异体积积分的一种有效的数值积分方法”,计算结构力学及其应用, pp. 9- 15, 1986年11月。

THE TREATMENT OF $1/r$ SINGULARITY AND DISCONTINUOUS TRACTIONS IN 3-D ELASTIC BOUNDARY ELEMENT METHOD

Wen Weidong and Gao Deping
(*Nanjing Aeronautical Institute*)

ABSTRACT

For treatment of common discontinuous tractions in 3-D elastic boundary element method, a simple and practical approach is proposed in this paper. The problem of the $1/r$ integral singularity and its treatment are discussed and analyzed as well. The numerical results show that the approach in this paper is satisfactory.

ANALYSIS FOR TYPICAL STATOR BLADE STRUCTURE AND ITS IMPLEMENTATION

Qiu Chunhang, Yu Duokui, Liang Jixin, Li Dong
(*Dalian University of Technology*)

ABSTRACT

A program named the STAP for the stator blade analysis with preprocessor and postprocessor is briefly introduced. Using the mesh generation and substructure assemblage functions of the STAP, it is possible to accomplish conveniently the stress and vibration analyses of the stator blade if only the coordinates of points on the contour of a blade and a few of mechanical properties of materials are inputted. Since mechanical properties, particularly Young's modulus and coefficient of thermal expansion, are temperature dependent, it is very important to take this fact into account for calculating the stress of a cooled gas turbine blade. For this end the STAP provides for user a finite element method with a temperature dependence on the properties. In structure modelling, in order to reduce the number of unknown variables and to describe the complex boundary conditions, the STAP is possessed of the function of Master-Slave relations between the nodal displacements.